TESTY STATYSTYCZNE

Hipoteza statystyczna to dowolne przypuszczenie dotyczące rozkładu cechy X.

Hipotezy statystyczne:

-parametryczne (dotyczą nieznanego parametru),

-parametryczne (dotyczą np. typu rozkładu),

WERYFIKACJA HIPOTEZ PARAMETRYCZNYCH

TESTY DOTYCZĄCE JEDNEGO PARAMETRU
X – cecha populacji, θ – parametr rozkładu cechy X.
Wysuwamy hipotezy:
zerową (podstawową)

$$H_0(\theta = \theta_0)$$

i **alternatywną** H_1, która ma najczęściej jedną z następujących postaci

$$H_1(\theta > \theta_0), \qquad H_1(\theta < \theta_0), \qquad H_1(\theta \neq \theta_0)$$

Obok szacowania nieznanego parametru często interesuje nas sprawdzenie hipotezy dotyczącej tego parametru. Hipotezę podstawową **należy postawić przed pobraniem próby** i często wynika ona z wartości normatywnej (np. sprawdzanie czy opakowania cukru mają nominalną wagę 1 kg) lub głoszonej opinii (np., że 60% rozpatrywanej populacji weźmie udział w wyborach).
Podstawową rolę odgrywa hipoteza zerowa $H_0(\theta = \theta_0)$ taką hipotezę nazywamy prostą (wskazuje na konkretną wartość parametru). Rola hipotezy alternatywnej jest pomocnicza (też może być hipotezą prostą).
Postępowanie przy weryfikacji powyższych hipotez jest następujące

1) Wybieramy pewną statystykę U_n o rozkładzie zależnym od parametru θ oraz pewną liczbę α z przedziału (0 , 1) i wyznaczamy podzbiór *K* zbioru liczb rzeczywistych tak by spełniony był warunek

$$P(U_n \in K \mid \theta = \theta_0) = \alpha$$

czyli aby prawdopodobieństwo, iż statystyka U_n przyjmie wartość ze zbioru *K*, przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza zerowa było równe α.

2) Pobieramy próbę i obliczamy wartość u_n statystyki U_n
3) Podejmujemy decyzję

gdy $u_n \in K$ odrzucamy H_0,

gdy $u_n \notin K$ przyjmujemy H_0 (nie ma podstaw do odrzucenia H_0).

Uzasadnienie:
Hipotezę H_0 odrzucamy gdy $u_n \in K$ bowiem prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia $U_n \in K$ jest bardzo małe przy założeniu, że prawdziwa jest hipoteza H_0 i skoro takie zdarzenie dla pobranej próby zaszło, należy sądzić, że założenie o prawdziwości hipotezy H_0 było niesłusznie przyjęte.

Terminologia

U_n – **sprawdzian (statystyka testująca),**
K – **zbiór krytyczny (zbiór odrzuceń),**
α – **poziom istotności** (typowe wartości α: 0,1; **0,05**; 0,01).
$\hat{\alpha}$ – **krytyczny poziom istotności** (poziom istotności przy którym następuje zmiana decyzji).

Błędy decyzji w teście sprawdzającym hipotezę H_0.

	Decyzja	
	Przyjmujemy H_0	Odrzucamy H_0
H_0 - prawdziwa	Decyzja właściwa	**Błąd I rodzaju**
H_0 - fałszywa	**Błąd II rodzaju**	Decyzja właściwa

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu I rodzaju wynosi: $P(U_n \in K \mid H_0) = \alpha$

Prawdopodobieństwo popełnienia błędu II rodzaju wynosi: $P(U_n \notin K \mid H_1) = \beta$

Testy do weryfikacji hipotez o wartości oczekiwanej

I. Cecha *X* populacji ma rozkład normalny N(m , σ), σ jest znane

Hipoteza zerowa $H_0(m = m_0)$

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian U_n	Zbiór krytyczny *K*	Wyznaczanie liczby *k*	Nr testu
$H_1(m > m_0)$	$\frac{\overline{X} - m_0}{\sigma / \sqrt{n}}$	$< k \; ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	1
$H_1(m < m_0)$		$(-\infty \; ; -k >$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	2
$H_1(m \neq m_0)$		$(-\infty \; ; -k > \cup < k \; ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	3

II. Cecha *X* populacji ma rozkład normalny N(m , σ), σ nie jest znane.

Hipoteza zerowa $H_0(m = m_0)$

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian U_n	Zbiór krytyczny *K*	Wyznaczanie liczby *k*	Nr testu
$H_1(m > m_0)$	$\frac{\overline{X} - m_0}{S / \sqrt{n-1}}$	$< k \; ; \infty)$	$P(\mid T_{n-1} \mid \geq k) = 2\alpha$	4
$H_1(m < m_0)$		$(-\infty \; ; -k >$	$P(\mid T_{n-1} \mid \geq k) = 2\alpha$	5
$H_1(m \neq m_0)$		$(-\infty \; ; -k > \cup < k \; ; \infty)$	$P(\mid T_{n-1} \mid \geq k) = \alpha$	6

III. Cecha *X* populacji ma dowolny rozkład, próba jest liczna n > 60.

Hipoteza zerowa $H_0(m = m_0)$

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian U_n	Zbiór krytyczny *K*	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m > m_0)$	$\frac{\overline{X} - m_0}{S / \sqrt{n}}$	$< k \; ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	7
$H_1(m < m_0)$		$(-\infty \; ; -k >$	$\Phi(k) = 1 - \alpha$	8
$H_1(m \neq m_0)$		$(-\infty \; ; -k > \cup < k \; ; \infty)$	$\Phi(k) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	9

Test do weryfikacji hipotezy o prawdopodobieństwie sukcesu

Cecha *X* populacji ma rozkład zerojedynkowy $P(X=1)=p,\ P(X=0)=1-p,\quad p\in(0;1)$

Hipoteza zerowa $H_0(p=p_0)$ Próba liczna n>100

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian U_n	Zbiór krytyczny *K*	Wyznaczanie liczby *k*	Nr testu
$H_1(p>p_0)$	$\frac{W-p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}}\sqrt{n}$	$<k\ ;\ \infty)$	$\Phi(k)=1-\alpha$	10
$H_1(p<p_0)$		$(-\infty\ ;\ -k>$	$\Phi(k)=1-\alpha$	11
$H_1(p\neq p_0)$	W – średnia liczba sukcesów	$(-\infty\ ;\ -k>\cup<k\ ;\ \infty)$	$\Phi(k)=1-\frac{\alpha}{2}$	12

Test do weryfikacji hipotez o odchyleniu standardowym

Cecha *X* populacji ma rozkład normalny N(m , σ).

Hipoteza zerowa $H_0(\sigma=\sigma_0)$

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian U_n	Zbiór krytyczny *K*	Wyznaczanie liczb *k i l*	Nr testu
$H_1(\sigma>\sigma_0)$	$\frac{nS^2}{\sigma_0^2}$	$<k\ ;\ \infty)$	$P(Y_{n-1}\geq k)=\alpha$	13
$H_1(\sigma<\sigma_0)$		$(0\ ;\ k>$	$P(Y_{n-1}\geq k)=1-\alpha$	14
$H_1(\sigma\neq\sigma_0)$		$(0\ ;\ k>\cup<l\ ;\ \infty)$	$P(Y_{n-1}\geq l)=\alpha/2$ $P(Y_{n-1}\geq k)=1-\alpha/2$	15

Uwaga: dla n>30 można stosować statystykę

$$U=\sqrt{2\frac{nS^2}{\sigma_0^2}}-\sqrt{2(n-1)-1}$$

o rozkładzie N(0,1).

TESTY DO PORÓWNYWANIA PARAMETRÓW

Testy do porównywania wartości oczekiwanych

Badane są dwie cechy *X* i *Y* różnych populacji. Zakładamy, że cechy te są zmiennymi losowymi niezależnymi. Z populacji, w której badana jest cecha X pobrano próbę n_1 elementową, natomiast z drugiej populacji pobrano próbę n_2 elementową.

1. Cechy *X* i *Y* mają rozkłady normalne odpowiednio $N(m_1,\sigma_1)$, $N(m_2,\sigma_2)$, przy czym odchylenia standardowe σ_1 i σ_2 są znane.

Hipoteza zerowa $H_0(m_1=m_2)$

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian $U_{n_1n_2}$	Zbiór krytyczny *K*	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m_1>m_2)$	$\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	$<k\ ;\ \infty)$	$\Phi(k)=1-\alpha$	16
$H_1(m_1<m_2)$		$(-\infty\ ;\ -k>$	$\Phi(k)=1-\alpha$	17
$H_1(m_1\neq m_2)$		$(-\infty\ ;\ -k>\cup<k\ ;\ \infty)$	$\Phi(k)=1-\frac{\alpha}{2}$	18

2. Cechy X i Y mają rozkłady normalne odpowiednio $N(m_1,\sigma)$, $N(m_2,\sigma)$, przy czym odchylenia standardowe obu cech są sobie równe i nie są znane.

Hipoteza zerowa $H_0(m_1 = m_2)$

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian $U_{n_1 n_2}$	Zbiór krytyczny K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m_1 > m_2)$	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1+n_2-2}\cdot\dfrac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}}$	$< k\ ;\ \infty)$	$P(\lvert T_{n_1+n_2-2}\rvert \geq k) = 2\alpha$	19
$H_1(m_1 < m_2)$		$(-\infty\ ;\ -k >$	$P(\lvert T_{n_1+n_2-2}\rvert \geq k) = 2\alpha$	20
$H_1(m_1 \neq m_2)$		$(-\infty\ ;\ -k > \cup$ $\cup < k\ ;\ \infty)$	$P(\lvert T_{n_1+n_2-2}\rvert \geq k) = \alpha$	21

Wielkość $S_p^2 = \dfrac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1+n_2-2}\cdot\dfrac{n_1+n_2}{n_1 n_2}$ nazywamy wariancją populacji.

3. Cechy X i Y mają rozkłady dowolne o wartościach oczekiwanych m_1, m_2, przy czym próby są liczne, n_1, n_2 > 80.

Hipoteza zerowa $H_0(m_1 = m_2)$

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian $U_{n_1 n_2}$	Zbiór krytyczny K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(m_1 > m_2)$	$\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1}+\dfrac{S_2^2}{n_2}}}$	$< k\ ;\ \infty)$	$\Phi(k) = 1-\alpha$	22
$H_1(m_1 < m_2)$		$(-\infty\ ;\ -k >$	$\Phi(k) = 1-\alpha$	23
$H_1(m_1 \neq m_2)$		$(-\infty\ ;\ -k > \cup < k\ ;\ \infty)$	$\Phi(k) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$	24

Test do porównywania prawdopodobieństw sukcesu.

Badane są dwie cechy X i Y różnych populacji o rozkładach zerojedynkowych,
$P(X=1)=p_1,\quad P(X=0)=1-p_1,\qquad P(Y=1)=p_2,\quad P(Y=0)=1-p_2,$

Z populacji, której badana jest cecha X pobrano próbę n_1 elementową, natomiast z drugiej populacji pobrano próbę n_2 elementową. Obie próby są liczne $n_1,\ n_2$ >100.

Hipoteza zerowa: $H_0(p_1=p_2)$

Hipoteza alt.	Sprawdzian $U_{n_1n_2}$	Zbiór krytyczny K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(p_1>p_2)$	$\frac{W_1-W_2}{\sqrt{\overline{W}(1-\overline{W})\cdot\frac{n_1+n_2}{n_1n_2}}}$	$<k\ ;\ \infty)$	$\Phi(k)=1-\alpha$	25
$H_1(p_1<p_2)$		$(-\infty\ ;\ -k>$	$\Phi(k)=1-\alpha$	26
$H_1(p_1\neq p_2)$		$(-\infty\ ;\ -k>\cup<k\ ;\ \infty$	$\Phi(k)=1-\frac{\alpha}{2}$	27

$W_1,\ W_2$ średnie liczby sukcesów w poszczególnych próbach,

$W_1=k_1/n_1,\quad W_2=k_2/n_2,$

$\overline{W}=(k_1+k_2)/(n_1+n_2)$ - średnia liczba sukcesów w połączonych próbach,

$$\overline{W}=\frac{n_1}{n_1+n_2}\cdot W_1+\frac{n_1}{n_1+n_2}\cdot W_2$$

Test do weryfikacji hipotez o porównywaniu wariancji
Cechy X i Y mają rozkłady normalne odpowiednio $N(m_1,\sigma_1),\ N(m_2,\sigma_2)$.
Z populacji, w której badana jest cecha X pobrano próbę n_1 elementową, natomiast z drugiej populacji pobrano próbę n_2 elementową. Tak dobieramy oznaczenia populacji aby $\hat{S}^2_{n_1}\geq\hat{S}^2_{n_2}$

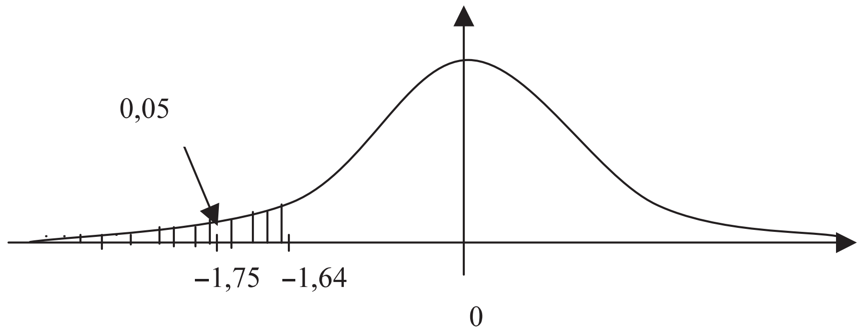
Hipoteza zerowa $H_0(\sigma_1^2=\sigma_2^2)$

Hipoteza alternatywna	Sprawdzian U_n	Zbiór krytyczny K	Wyznaczanie liczby k	Nr testu
$H_1(\sigma_1^2>\sigma_2^2)$	$\frac{\hat{S}^2_{n_1}}{\hat{S}^2_{n_2}}$	$<k\ ;\ \infty)$	$P(F_{n_1-1;n_2-1}\geq k)=$ (F - rozkład Snedecora)	28

Przykład
Według danych producenta, określony typ samochodu zużywał 10 *l* /100km. Po dokonaniu pewnych usprawnień w tym typie samochodu oczekuje się, że zużycie paliwa spadnie. Aby to sprawdzić dokonano pomiaru zużycia paliwa
w 25 losowo wybranych samochodach tego typu po modernizacji i otrzymano wynik $\bar{x}_{25} = 9{,}3$ l/100km. Zakładając, że zużycie paliwa ma rozkład normalny $N(m, 2)$ sprawdzić czy modernizacja istotnie zmniejszyła zużycie paliwa. Przyjąć $\alpha = 0{,}05$.
Rozwiązanie
Zastosujemy test 2.
$H_0(m = 10),\quad H_1(m < 10)$,
$\alpha = 0{,}05$ zatem $\Phi(k) = 1 - \alpha = 0{,}95$ stąd $k = 1{,}64$
Zbiór krytyczny
$K = (-\infty; -1{,}64\rangle$
Wartość statystyki

$$u = \frac{9{,}3 - 10}{2}\sqrt{25} = -1{,}75$$

interpretacja graficzna:



Ponieważ $u \in K$ to hipotezę H_0 odrzucamy. Zatem zmiany konstrukcyjne istotnie zmniejszyły zużycie paliwa.

Obliczymy dla jakich wartości średniej z próby 25 – elementowej decyzja byłaby taka sama:

$$\frac{\bar{x} - 10}{2}\sqrt{25} < -1{,}64 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} < 9{,}34$$

Zatem dla $\bar{x} < 9{,}34$ wartość u należy do zbioru krytycznego *K*.

Wyznaczymy krytyczny poziom istotności $\hat{\alpha}$.
$\Phi(1{,}75) = 1 - \hat{\alpha} \cong 0{,}96$
stąd $\hat{\alpha} \cong 0{,}04$
Zatem dla $\alpha < 0{,}04$ podjęlibyśmy inną decyzję.

Zauważmy, że odrzucając hipotezę H_0 narażamy się na popełnienie błędu
I rodzaju (prawdopodobieństwo jego popełnienia wynosi 0,05).

Przykład

Dokładność pracy obrabiarki sprawdza się wyznaczając odchylenie standardowe średnicy toczonego detalu, powinno ono wynosić $\sigma_0 = 0,2$. Zmierzono średnice (mm) 11 losowo wybranych detali i otrzymano:

100,6; 99,6; 100,0; 100,1; 100,3; 100,0; 99,9; 100,2; 100,4; 100,6; 100,5

Zakładając, że średnice detali mają rozkład normalny, sprawdzić na podstawie powyższych danych, że obrabiarka ma pożądaną dokładność. Przyjąć poziom istotności 0,05.

Rozwiązanie

Zastosujemy test 13.

$H_0(\sigma = 0,2),\ H_1(\sigma > 0,2)$, $\alpha = 0,05$

Zbiór krytyczny

K = <18,307; ∞)

Obliczamy:

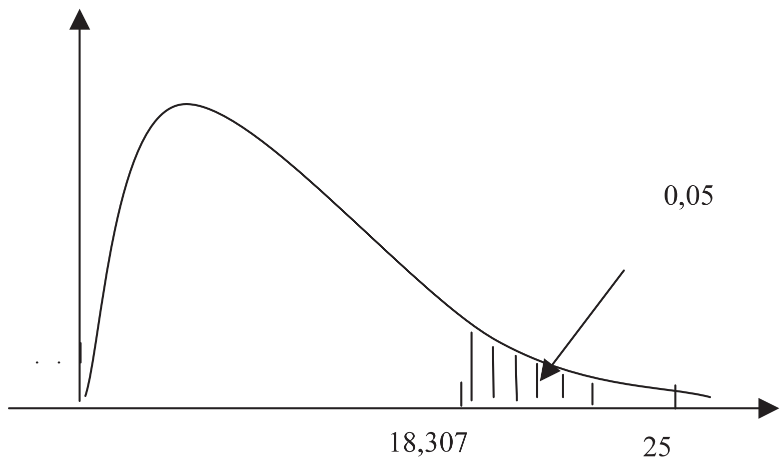
$\bar{x}_{11} = 100,2$

$s_{11}^2 = 0,091$

Wartość statystyki

$u = \dfrac{11 \cdot 0,091}{0,04} = 25$

interpretacja graficzna:



Ponieważ $u \in K$ to hipotezę H_0 odrzucamy. Zatem należy sądzić, że obrabiarka ma gorszą dokładność niż pożądana.

Wyznaczymy krytyczny poziom istotności $\hat{\alpha}$.

$Y_{10}(25) = \hat{\alpha} \cong 0,005$

Zatem dla $\alpha < 0,005$ podjęlibyśmy inną decyzję.

Przykład

Dwie brygady produkują detale. Z partii detali wyprodukowanych przez I brygadę wylosowano 1000 szt. i wśród nich było 20 braków. Z partii detali wyprodukowanych przez II brygadę wylosowano 900 szt. i wśród nich było 30 braków. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}05$ sprawdzić hipotezę, że odsetek braków w I brygadzie jest niż niższy niż w II brygadzie.

Rozwiązanie.

Zastosujemy test 26.

$H_0(p_1 = p_2),\ H_1(p_1 < p_2)$, $\alpha = 0{,}01$

Zbiór krytyczny

$K = (-\infty; -2{,}33>$

Obliczamy:

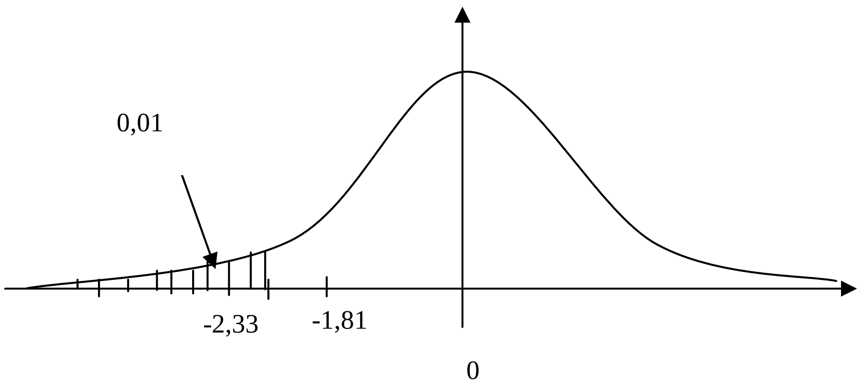
$w_1 = 20/1000$; $\qquad w_2 = 30/900$

$\overline{w} = 50/1900$

Wartość statystyki

$u = -1{,}81$

interpretacja graficzna:



Ponieważ $u \notin K$ to nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0. Oznacza to, że w granicach błędu statystycznego obie brygady mają ten sam odsetek braków.

Wyznaczymy krytyczny poziom istotności $\hat{\alpha}$.

$\Phi(1{,}81) = 1 - \hat{\alpha} \cong 0{,}96485$

stąd $\hat{\alpha} \cong 0{,}035$. Zatem dla $\alpha > 0{,}035$ podjęlibyśmy inną decyzję.

TESTY NIEPARAMETRYCZNE

TEST ZGODNOŚCI

Test zgodności χ^2

Hipoteza zerowa H_0(Cecha *X* populacji ma rozkład o dystrybuancie *F*).

Hipoteza alternatywna H_1(Cecha *X* populacji nie ma rozkładu o dystrybuancie *F*).

Weryfikacja powyższych hipotez za pomocą tzw. testu χ^2 przebiega następująco:

1) Pobieramy liczną próbę (*n* >80). Prezentujemy ją w szeregu rozdzielczym klasowym w *r* klasach.
2) Obliczamy na podstawie próby wartości estymatorów największej wiarygodności nieznanych *l* parametrów. Np. dla rozkładu normalnego *l* = 2, dla rozkładu Poissona *l* = 1, dla rozkładu jednostajnego w danym przedziale *l* = 0.
3) Przyjmujemy, że cecha *X* ma rozkład o dystrybuancie *F*.
4) Dla każdego przedziału klasowego $A_i =< a_i ; a_{i+1})$ (*i* = 1, 2, ..., *r*) obliczamy prawdopodobieństwo
   $p_i = P(X \in A_i) = P(a_i \le X < a_{i+1}) = F(a_{i+1}) - F(a_i)$
   (pierwszy przedział rozciągamy w lewo do – ∞; ostatni w prawo do +∞).
5) Obliczamy
   $$u_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$$
   gdzie n_i jest liczebnością klasy A_i, natomiast $\hat{n}_i = np_i$ jest jej liczebnością teoretyczną (wynikającą z przyjęcia, że hipoteza H_0 jest prawdziwa).
   Zauważmy, że
   $$\sum_{i=1}^{r} n_i = \sum_{i=1}^{r} \hat{n}_i = n$$
   n_i – liczebności zaobserwowane (empiryczne),
   $\hat{n}_i$ – liczebności obliczone przy założeniu, że H_0 jest prawdziwa, (teoretyczne),
   Gdy te liczebności niewiele różnią się od siebie (względnie) to wartość statystyki będzie niewielka, w przeciwnym przypadku należy oczekiwać dużej wartości statystyki.
6) Wyznaczamy zbiór krytyczny prawostronny $K =< k\ ; \infty)$, gdzie *k* wyznaczamy z tablicy rozkładu χ^2 z $r - l - 1$ stopniami swobody i dla prawdopodobieństwa α (równemu poziomowi istotności).
7) Podejmujemy decyzję:
   odrzucamy hipotezę H_0, gdy $u_n \in K$
   przyjmujemy hipotezę H_0, gdy $u_n \notin K$

Uwaga. Pierwsza i ostatnia klasa szeregu rozdzielczego powinny mieć postać $A_1 = (-\infty\ ; a_2)$, $A_r =< a_r ; \infty)$ i do każdej z nich powinno należeć co najmniej 5 elementów próby. Do pozostałych klas powinno należeć co najmniej 10 elementów próby. Klas nie może być mniej niż 4.

Przykład

Badano liczbę awarii systemu komputerowego (cecha *X* populacji). W ciągu 100 tygodni zarejestrowano następujące ilości awarii:

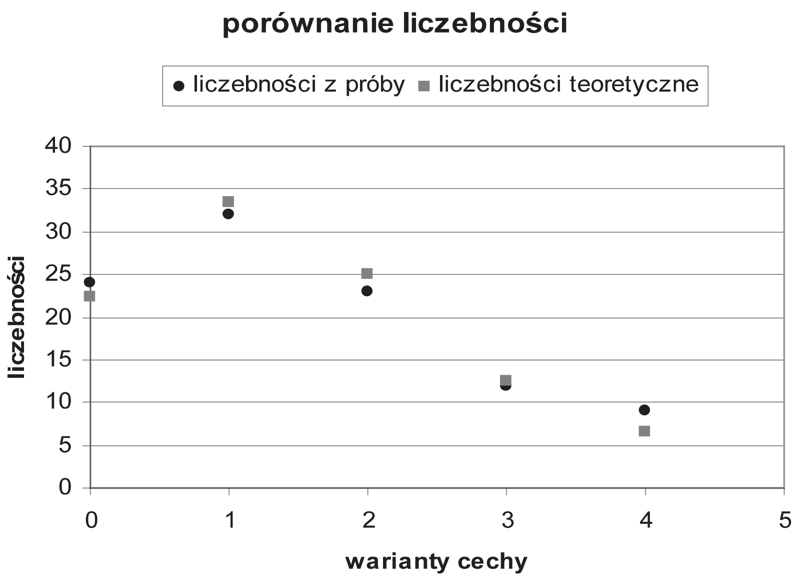
Liczba awarii	0	1	2	3	4
Liczba tygodni	24	32	23	12	9

Na poziomie istotności α = 0,05 sprawdź czy rozkład awarii ma rozkład Poissona.
hipotezy:

H_0(Cecha X populacji ma rozkład Poissona) i
H_1(Cecha X populacji nie ma rozkładu Poissona).
Nieznanym parametrem jest λ (l = 1).

i	n_i	$i \cdot n_i$	p_i	$n\, p_i$	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$
0	24	0	0,2231	22,31	0,128019
1	32	32	0,3347	33,47	0,064562
2	23	46	0,2510	25,10	0,175697
3	12	36	0,1255	12,55	0,024104
4	9	36	0,0657	6,57	0,898767
suma	100	150	1	100	1,291149

Estymatorem parametru λ jest średnia (jej wartość to suma trzeciej kolumny podzielona przez liczebność próby); zatem przyjmiemy, że $\lambda \cong 1{,}5$,



Jak widać liczebności teoretyczne są zbliżone do liczebności zaobserwowanych, możemy więc przewidywać, że nie będzie podstaw do odrzucenia przypuszczenia, że liczba awarii ma rozkład Poissona. W podobny sposób można by porównywać częstości względne poszczególnych wariantów i prawdopodobieństwa odczytane z tablicy.

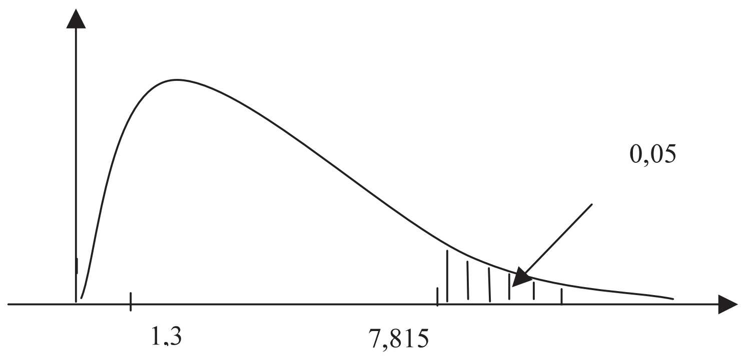
u_{100} = 1,3 (suma ostatniej kolumny).

Wyznaczamy zbiór krytyczny prawostronny $K = < k; \infty)$.

Liczbę k odczytujemy z tablicy rozkładu χ^2 dla $r - l - 1 = 5 - 2 = 3$ stopni swobody i prawdopodobieństwa $\alpha = 0{,}05$.

Mamy k = 7,815, więc $K = < 7{,}815 ; \infty)$.

Interpretacja graficzna:



Ponieważ $u_{100} = 1{,}788 \notin K$, więc hipotezę, że cecha ma rozkład Poissona przyjmujemy.
Wyznaczymy krytyczny poziom istotności $\hat{\alpha}$. $P(Y_3 > 1{,}3) = \hat{\alpha} \cong 0{,}75$
Zatem dla $\alpha > 0{,}75$ podjęlibyśmy inną decyzję.

TEST NIEZALEŻNOŚCI

Test niezależności χ^2

Rozpatrujemy badane równocześnie dwie cechy X i Y (nie muszą być mierzalne).
Sprawdzamy hipotezę: $H_0(X, Y$ są niezależne),
α – poziom istotności.
Próbę losową n elementową ($n \geq 80$) zapisujemy w postaci tablicy (podział na warianty powinien być taki aby $n_{ij} \geq 8$):

		Y				
		y_1	y_2	...	y_l	$n_{i\bullet}$
X	x_1	n_{11}	n_{12}	...	n_{1l}	$n_{1\bullet}$
	x_2	n_{21}	n_{22}	...	n_{2l}	$n_{2\bullet}$
	...	...	...	...	...	...
	x_k	n_{k1}	n_{k2}	...	n_{kl}	$n_{1k\bullet}$
	$n_{\bullet j}$	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	...	$n_{\bullet l}$	n

$n_{i\bullet}$ – sumy wierszy,
$n_{\bullet j}$ – sumy kolumn,
n_{ij} – liczebność i-tego wariantu dla cechy X oraz j-tego wariantu dla cechy Y.

Na podstawie próby obliczamy wartość statystyki

(*) $$u_n = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\frac{\left(n_{ij} - \hat{n}_{ij}\right)^2}{\hat{n}_{ij}}$$

(rozpatrywana statystyka ma rozkład $Y_{(k-1)(l-1)}$)

gdzie $\hat{n}_{ij} = \dfrac{n_{i\bullet} n_{\bullet j}}{n} = \dfrac{(\text{suma } i\text{-tego wiersza}) \times (\text{suma } j\text{-tej kolumny})}{\text{liczebność próby}}$

Zbiór krytyczny ma postać $K = \langle k; \infty)$; gdzie $P(Y_{(k-1)(l-1)} \geq k) = \alpha$

Jeśli $u_n \in K$ to H_0 odrzucamy, w przeciwnym przypadku nie ma podstaw do odrzucenia H_0.

Uwaga
W przypadku gdy cechy X i Y mają tylko po dwa warianty to rozpatrywana tablica ma postać (tzw. tablica czteropolowa):

		Y 1	2	
X	1	A	B	$A+B$
	2	C	D	$C+D$
		$A+C$	$B+D$	n

Statystyka U_n ma wtedy postać:

$$U_n = \frac{n(AD - BC)^2}{(A+B)(A+C)(B+D)(C+D)}$$

i ma rozkład Y_1.

Uwaga
Wielkość

$$T = \sqrt{\frac{U_n}{n\sqrt{(k-1)(l-1)}}}$$

nazywamy współczynnikiem Czuprowa $(T \in <0;\ 1>)$.
Wielkość

$$V = \sqrt{\frac{U_n}{n(m-1)}}$$

gdzie $m = \min(k, l)$
nazywamy współczynnikiem Cramera $(V \in <0;1>)$.
Współczynniki te mogą służyć do oceny siły zależności między cechami (nawet w przypadku cech niemierzalnych).

Przykład
W celu zweryfikowania hipotezy, że studentki pewnej uczelni lepiej zdają egzaminy niż studenci, wylosowano próbę n = 180 studentek i studentów i otrzymano następujące wyniki zaliczenia letniej sesji egzaminacyjnej:

SESJA	STUDENTKI	STUDENCI
ZALICZONA	75	25
NIEZALICZONA	55	25

Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ sprawdzić hipotezę o niezależności wyników egzaminacyjnych od płci.
Rozwiązanie
Wyznaczamy wartość statystyki korzystając z danych zawartych w tablicy czteropolowej:

$$u_n = 0{,}84 \qquad K = \langle 2{,}706;\ \infty)$$

zatem nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy o niezależności.

ZADANIA

Zadanie 1
Waga paczki mąki jest zmienną losową X o wartości oczekiwanej m i odchyleniu standardowym σ.
Z partii mąki wybrano losowo 100 paczek i obliczono, że $\overline{x}_{100} = 0{,}998$ kg, $s_{100} = 0{,}005$ kg.
Na poziomie istotności 0,01 sprawdź hipotezy $H_0(m = 1{,}0)$, $H_1(m < 1{,}0)$,
Ile wynosi krytyczny poziom istotności?

Zadanie 2
Na pudełkach zapałek jest napis: przeciętnie 48 zapałek. Z partii zapałek pobrano próbę 20 pudełek i obliczono, że średnia liczba zapałek w pudełku jest równa 47,5 szt. a odchylenie standardowe w tej próbie jest równe 3 szt. Zakładamy, że rozkład liczby zapałek w pudełku jest $N(m, \sigma)$. Na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ ustalić czy napis na pudełku jest zgodny z rzeczywistością. Ile wynosi krytyczny poziom istotności?

Zadanie 3
Sondaż opinii publicznej na temat frekwencji w zbliżających się wyborach wykazał, że w losowo wybranej grupie 500 osób 320 zamierza uczestniczyć w głosowaniu. Czy na poziomie istotności równym 0,05 można przyjąć, że ponad 60% ogółu osób zamierza wziąć udział w wyborach? Ile wynosi krytyczny poziom istotności?

Zadanie 4
Wiadomo, że miesięczne zużycie energii elektrycznej w gospodarstwie rodzinnym pewnego miasta jest zmienną losową X o rozkładzie normalnym $N(m, 30\text{ kWh})$. Na podstawie próby 25 elementowej obliczono, że $\overline{x}_{25} = 186$ kWh.

a) Na poziomie istotności 0,01 sprawdź hipotezy $H_0(m = 170)$, $H_1(m > 170)$
b) Na poziomie istotności 0,05 sprawdź hipotezy $H_0(m = 200)$, $H_1(m < 200)$
c) Na poziomie istotności 0,05 sprawdź hipotezy $H_0(m = 180)$, $H_1(m \neq 180)$

Zadanie 5
Wysunięto hipotezę, że Studenci AM palą papierosy rzadziej niż studenci AWF. W celu jej sprawdzenia wylosowano po 100 studentów z każdej z uczelni i zapytano ich czy palą. W grupie studentów AM papierosy paliło 34 osób, w grupie studentów AWF – 38 osób.
a) na poziomie istotności równym 0,02 zweryfikować prawdziwość postawionej hipotezy.
b) przy jakim poziomie istotności podjęta decyzja może ulec zmianie?

Zadanie 6
Czas przepisywania jednej strony przez maszynistkę (cecha X) jest zmienną losową o rozkładzie normalnym. Wylosowano próbę 9 maszynistek i otrzymano średnią 7 minut i odchylenie standardowe 2 minuty. Czy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}1$ można twierdzić, że średni czas przepisywania jednej strony przez maszynistki jest wyższy niż 5 minut (tyle wynosi norma) ? Ile wynosi krytyczny poziom istotności?

Zadanie 7
Zakłada się, że rozkład średnicy produkowanych nitów jest rozkładem normalnym o odchyleniu standardowym 0,1 mm. Dokonano 20 pomiarów średnicy losowo wybranych nitów, otrzymując wariancję 0,0225 mm^2. Przyjmując poziom istotności równy 0,1;

zweryfikować hipotezę, że faktyczna wariancja średnicy nitów jest zgodna z zakładaną normą. Ile wynosi krytyczny poziom istotności?

Zadanie 8

Badaną cechą jest czas świecenia żarówek. Dwie identyczne maszyny produkują żarówki. Wylosowano po 10 żarówek z produkcji poszczególnych maszyn i obliczono, że:

$\bar{x}_1 = 2063$, $\bar{x}_2 = 2059$, $\sum\left(x_{1i} - \bar{x}_1\right)^2 = 86$, $\sum\left(x_{2i} - \bar{x}_2\right)^2 = 84$,

Zakładając, że badane cechy mają rozkłady normalne sprawdzić czy na poziomie istotności 0,05 można uznać, że średni czas świecenia żarówek produkowanych przez obie maszyny jest taki sam.
Ile wynosi krytyczny poziom istotności?
(wsk. można przyjąć, że wariancje są sobie równe bo identyczne maszyny).

Zadanie 9

W zbadanej losowo próbie 200 pracowników firmy A średnie dochody w ciągu miesiąca wynosiły 2 000 PLN z odchyleniem standardowym równym 300 PLN. W 100-elementowej próbie pracowników firmy B średnie dochody wynosiły 1900 PLN, a odchylenie standardowe – 200 PLN.

a) Czy otrzymane wyniki potwierdzają przypuszczenie, że średnie dochody w firmie A są wyższe niż w firmie B. Przyjąć poziom istotności równy 0,05.
b) Wyznacz krytyczny poziom istotności.

Zadanie 10

Ryzyko akcji mierzymy wariancją ceny (zróżnicowanie ceny w określonym czasie). Zbadano w ciągu 25 notowań ceny akcji firm F_1 i F_2 i obliczono, że odchylenie standardowe w tym okresie wynosi 6 zł dla F_1 i 5 zł dla F_2. Zakładając, że rozkład cen akcji jest normalny, sprawdź na poziomie istotności 0,05, czy ryzyko dla akcji firmy F_1 jest istotnie większe niż dla F_2 .

Zadanie 11

Losowa próba n = 200 niezależnych obserwacji miesięcznych wydatków na żywność rodzin 3-osobowych dała następujący rozkład tych wydatków (w tys. zł):

Wydatki	Liczba rodzin
1,0 ÷ 1,4	15
1,4 ÷ 1,8	45
1,8 ÷ 2,2	70
2,2 ÷ 2,6	50
2,6 ÷ 3,0	20

Należy na poziomie istotności $\propto$ = 0,05 zweryfikować hipotezę, że rozkład wydatków na żywność jest normalny. Wyznaczyć krytyczny poziom istotności.

Zadanie 12

Badanie 200 losowo wybranych czteroosobowych gospodarstw domowych pod względem miesięcznych wydatków na żywność dostarczyło następujących danych:
$\bar{x}$ = 300 PLN i s = 65 PLN;.

Miesięczne wydatki	150 ÷ 210	210 ÷ 270	270 ÷ 330	330 ÷ 390	390 ÷ 450
Liczba gospodarstw	20	45	70	50	15
$\frac{(n_i - \hat{n}_i)^2}{\hat{n}_i}$	0,610	0,164	0,011	0,101	

Obliczając brakujące dane, na poziomie istotności 0,05 zweryfikować hipotezę, że wydatki na żywność w 4 osobowych gospodarstwach domowych mają rozkład normalny. Wyznaczyć krytyczny poziom istotności.

Zadanie 13

W celu sprawdzenia czy wyniki testu mają rozkład normalny wylosowano 200 studentów i wyznaczono liczebności teoretyczne dla poszczególnych klas wyników testu i zestawiono je z liczebnościami zaobserwowanymi:

Liczebności zaobserwowane	12	28	36	50	34		18
Liczebności teoretyczne	10		38	49	35	25	18

Czy na poziomie istotności $\alpha = 0{,}01$ można twierdzić, wyniki testu mają rozkład normalny? Przy jakim poziomie istotności podjęta decyzja ulegnie zmianie?

Zadanie 14

Przez 150 dni rejestrowano w pewnym mieście liczbę pożarów :

Liczba pożarów	0	1	2	3	4
Liczba dni	70	55	15	5	5

Na poziomie istotności 0,05 sprawdzić hipotezę, że liczba pożarów ma rozkład Poissona.

Wyznacz krytyczny poziom istotności.

Zadanie 15

W pewnym mieście rejestrowano w ciągu kolejnych dni tygodnia liczbę kolizji drogowych:

Poniedziałek	Wtorek	Środa	Czwartek	Piątek	Sobota	Niedziela
20	25	20	30	30	35	15

Na poziomie istotności 0,01 sprawdzić hipotezę, że liczba kolizji jest jednakowa w każdym dniu tygodnia. Przy jakim poziomie istotności należy podjąć decyzję przeciwną?

Zadanie 16

W 10 grupach studentów zarejestrowano następujące ilości ocen niedostatecznych po egzaminie ze statystyki:

Nr grupy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Liczba ocen ndst.	8	9	14	6	8	11	12	12	10	10

Na poziomie istotności 0,05 sprawdzić hipotezę, że rozkład ocen niedostatecznych w tych grupach jest równomierny. Przy jakim poziomie istotności należy podjąć decyzję przeciwną?

Zadanie 17

W celu sprawdzenia hipotezy, że cecha X ma rozkład o funkcji prawdopodobieństwa

1	2	3	4
0,1	0,1	0,6	0,2

dokonano 100 pomiarów. Otrzymano następujące dane

xi	1	2	3	4
ni	5	10	70	15

Na poziomie istotności α = 0,05 sprawdzić postawioną hipotezę. Przy jakim poziomie istotności podjęta decyzja ulegnie zmianie?

Zadanie 18

W celu sprawdzenia hipotezy, że młodzież męska nosząca kolczyki ma gorsze wyniki w nauce, wylosowano próbę 492 uczniów i otrzymano następujące dane:

	WYNIKI W NAUCE	
MŁODZIEŻ MĘSKA	ZŁE	DOBRE
NOSZĄCA KOLCZYKI	51	43
BEZ KOLCZYKÓW	195	203

Na poziomie istotności α = 0,05 sprawdzić hipotezę o niezależności wyników w nauce od noszenia kolczyków przez młodzież męską. Wyznacz krytyczny poziom istotności. Oblicz współczynnik Cramera.

Zadanie 19

Pewien produkt można wytworzyć trzema metodami produkcji. Wysunięto hipotezę, że wadliwość produkcji nie zależy od metody produkcji. Wylosowano niezależnie próbę 270 sztuk wyrobu i otrzymano następujące wyniki badania jakości dla poszczególnych metod:

	METODA PRODUKCJI		
JAKOŚĆ	I	II	III
DOBRA	40	80	60
ZŁA	10	60	20

Na poziomie istotności α = 0,05 sprawdzić hipotezę o niezależności jakości produkcji od metod produkcji. Wyznacz krytyczny poziom istotności.
Oblicz współczynniki Cramera i Czuprowa.

Zadanie 20

Wykształcenie wybranych 100 pracowników firmy było następujące:

Wykształcenie	mężczyźni	kobiety
Wyższe	30	10
Średnie	15	15
Podstawowe	20	10

Czy można stwierdzić, że między wykształceniem pracowników a ich płcią nie ma stochastycznej niezależności? Przyjąć poziom istotności 0,05. Jak silny jest ten związek?

Wyznacz krytyczny poziom istotności. Oblicz współczynniki Cramera i Czuprowa.

L.Kowalski 11.06.2010